

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Актуальність теми.** Протягом останніх десятиріч у світі невпинно розширюється виробництво композитних матеріалів і область їх застосування. Наукове обґрунтування засад і принципів конструювання композитів є передумовою створення матеріалів з наперед заданими властивостями, які значно перевершують властивості класичних матеріалів або взагалі відсутні в них. Це зумовлює значний інтерес до дослідження широкого кола наукових проблем, що стосуються композитних матеріалів. Одна з таких проблем – дослідження процесів, пов'язаних з поширенням пружних хвиль в шаруватих композитних матеріалах з початковими напруженнями.

Пружні хвилі є найбільш ефективним інструментом для дослідження напружено-деформованого стану, структури і властивостей твердих тіл. Це пов'язано з тим, що хвилі – природне, а не чужорідне поле для твердих тіл, і можуть поширюватися на досить великі глибини, взаємодіяти з середовищем, не вносячи при цьому змін в процеси, що там відбуваються.

Внутрішня логіка механіки деформованого твердого тіла як науки, а також запити практики (передусім, неруйнівних випробувань матеріалів і елементів конструкцій) вимагають вдосконалення математичних моделей тіл, що деформуються, роблячи їх найбільш адекватними процесам, що відбуваються.

Для дослідження процесів, пов'язаних з поширенням пружних хвиль в шаруватих композитних матеріалах з початковими напруженнями застосовується тривимірна лінеаризована теорія поширення пружних хвиль в тілах з початковими напруженнями, що описує основне явище, пов'язане з впливом початкових напружень, – залежність швидкості поширення пружних хвиль від початкових напружень. В рамках цих досліджень розглядалися різні моделі шаруватого середовища, напрями поширення пружних хвиль, різні методи розв'язку поставлених задач, отримано ряд суттєвих результатів.

Разом з тим, задача про поширення пружних вісесиметричних хвиль в композитних шаруватих попередньо напружених матеріалах періодичної структури для випадку повного проковзування шарів не розглядалася. Розв'язок цієї задачі дає можливість визначити діапазон фізичних величин, що визначають динамічні процеси в композиційних матеріалах при реальному контакті між шарами композиту.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Дослідження, що проведені в дисертаційній роботі, виконані у відповідності з науковими темами Інституту механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України: 1.3.1.397 «Дослідження динамічних процесів в шаруватих матеріалах та неоднорідних елементах конструкцій» (№ держреєстрації 0115U005699) і 1.3.1.409 «Сучасні проблеми механіки матеріалів і елементів конструкцій з внутрішньою структурою та дефектами» (№ держреєстрації 0117U000699).

**Мета і задачі дослідження.** Метою роботи є дослідження закономірностей поширення вісесиметричних пружних хвиль в шаруватих

композитних матеріалах з початковими напруженнями при проковзуванні шарів, що включають:

- постановку задач про поширення вісесиметричних пружних хвиль в шаруватих композитних матеріалах з початковими напруженнями в випадку проковзування шарів;
- розвиток методу дослідження процесу поширення пружних вісесиметричних хвиль в шаруватих композитних матеріалах з початковими напруженнями на випадок повного проковзування шарів;
- виведення дисперсійних рівнянь для вісесиметричних хвиль, що поширюються вздовж шарів композитного матеріалу періодичної структури;
- розробку алгоритмів та програмного забезпечення для чисельного дослідження отриманих дисперсійних рівнянь;
- побудову двосторонніх оцінок для фазової швидкості вісесиметричних хвиль на основі числових результатів, одержаних при повному проковзуванні та повному контакті шарів;
- встановлення і дослідження загальних закономірностей впливу початкових напружень, умов контакту шарів композитного матеріалу, фізичних та геометричних характеристик на фазову швидкість вісесиметричних хвиль.

*Об'єктом дослідження є динамічні процеси в шаруватих композитних матеріалах з початковими напруженнями при проковзуванні шарів.*

*Предметом дослідження є вплив початкових напружень, умов контакту шарів композитного матеріалу, фізичних та геометричних характеристик на фазову швидкість вісесиметричних хвиль.*

**Методи дослідження.** Дослідження проводились у рамках тривимірної лінеаризованої теорії поширення пружних хвиль у тілах з початковими напруженнями. Для розв'язку трансцендентних дисперсійних рівнянь застосовувалися класичні ітераційні методи обчислювальної математики.

**Наукова новизна одержаних результатів** полягає у тому, що:

- вперше дано постановку задач про поширення вісесиметричних пружних хвиль у шаруватих композитних матеріалах з початковими напруженнями при умові проковзування шарів;
- розвинуто метод дослідження процесу поширення хвиль в шаруватих композитних матеріалах з початковими напруженнями при умові проковзування шарів;
- отримано нові дисперсійні співвідношення для квазіпоперечних та квазіповздовжніх хвиль, що поширюються вздовж шарів, а також їхні довгохвильові наближення;
- розроблені алгоритми та програмне забезпечення для чисельного дослідження отриманих дисперсійних рівнянь;
- отримано розв'язки нових задач тривимірної лінеаризованої теорії поширення пружних хвиль в тілах з початковими напруженнями;
- побудовано двосторонню оцінку для фазової швидкості вісесиметричних хвиль на основі одержаних числових результатів;
- встановлено й проаналізовано нові загальні закономірності.

**Достовірність результатів.** Всі результати досліджень отримані в результаті коректно поставлених задач у рамках тривимірної лінеаризованої теорії поширення пружних хвиль в тілах з початковими напруженнями, з залученням апробованих аналітичних та числових математичних методів та програмного забезпечення. Одержані результати перевірялися на еталонних задачах даного класу. Всі основні результати погоджуються з результатами вже відомими та міркуваннями фізичного характеру.

**Практичне значення одержаних результатів.** В дисертаційній роботі для високоеластичних композитних матеріалів періодичної структури отримані чисельні результати для випадку повного контакту шарів та випадку повного проковзування шарів, що дає можливість визначити діапазон фізичних величин, що визначають динамічні процеси в композиційних матеріалах при реальному контакті між шарами. Отримані оцінки можуть бути використані у інженерній практиці.

**Особистий внесок здобувача.** Всі теоретичні та практичні результати дисертації, що виносяться на захист, одержані автором самостійно. В роботі [18] співавторами проведено порівняння результатів розв'язків дисперсійних рівнянь для плоских і вісесиметричних хвиль.

Визначення загального напрямку досліджень і постановка задач належать науковому керівникові О. М. Гузю. Аналіз отриманих результатів проводився сумісно з О. М. Гузем.

**Апробація результатів дисертації.** Основні положення і результати дисертації доповідались на таких конференціях:

Міжнародній науковій конференції „Математичні проблеми технічної механіки – 2016” ( Дніпродзержинськ, Дніпропетровськ, Київ, 2016);

III Міжнародній науково-практичній інтернет-конференції „Актуальні проблеми інженерної механіки” (Одеса, Київ, 2016);

Науково-технічній конференції „Інформатика, математика, автоматика – 2016” (Суми, 2016);

IV Всеукраїнській науковій конференції „Математичне моделювання та математична фізика” (Кременчук, 2016);

Міжнародній науковій конференції „Математичні проблеми технічної механіки – 2017”. (Дніпро, Кам'янське, 2017);

XVII Міжнародній конференції „Моделювання та дослідження стійкості динамічних систем (DSMSI-2017)” (Київ, 2017);

V Всеукраїнській науковій конференції „Математичне моделювання та математична фізика” (Кременчук, 2017);

VIII Міжнародній науково-практичній конференції „Проблеми безпеки на транспорті” (Республіка Білорусь, м. Гомель, 2017);

XV Міжнародній науково-технічній конференції „Фізичні процеси та поля технічних і біологічних об'єктів” (Кременчук, 2017);

III Всеукраїнській науково-практичній конференції студентів, аспірантів та молодих вчених „Інформаційні технології в моделюванні ITM – 2018” (Миколаїв, 2018);

II Міжнародній науково-практичній інтернет-конференції „Наука III тисячоліття: пошуки, проблеми, перспективи розвитку” (Бердянськ, 2018);

Всеукраїнській заочній науково-практичній інтернет-конференції «Прикладна математика та комп’ютерні науки» (Маріуполь, 2019);

VI Міжнародній науково-практичній конференції „Актуальні проблеми інженерної механіки» (Одеса, Київ, 2019).

Окремі положення дисертації періодично доповідались на наукових семінарах відділу динаміки і стійкості суцільних середовищ Інституту механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України (Київ, 2016–2018). Дисертація у завершеному вигляді доповідалася і обговорювалася на науковому семінарі відділу динаміки і стійкості суцільних середовищ Інституту механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України (Київ, 2019); науковому семінарі Інституту механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України за напрямом ”Механіка композитних і неоднорідних середовищ” (Київ, 2019).

**Публікації.** За темою дисертації опубліковано 19 наукових робіт [1–19], в тому числі 6 статей у фахових та міжнародних виданнях [1 – 6].

**Структура і обсяг дисертації.** Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел із 211 найменувань на 22 сторінках. Загальний обсяг дисертації становить 119 сторінок разом із 70 рисунками.

## ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** подано загальну характеристику дисертації; розкрито стан наукової проблеми, обґрунтовано актуальність теми дисертації, її зв’язок з науковими програмами; сформульовано мету роботи, задачі і методи дослідження; відзначено наукову новизну, практичну цінність і достовірність одержаних результатів; наведено дані про апробацію та публікацію результатів дисертаційної роботи, а також короткий опис структури дисертації.

У **першому** розділі наведено огляд літератури за темою дисертації.

На основі аналізу виконаного огляду сучасного стану проблеми визначено місце даної роботи серед проведених раніше досліджень і обґрунтовано вибір напрямку досліджень.

Важливими в практичному аспекті є дослідження закономірностей поширення пружних хвиль. В наш час більшість досягнень, пов’язаних з дослідженням пружних хвиль, оснований насамперед на лінійній теорії поширення пружних хвиль, результати якої викладені в численних фундаментальних монографічних виданнях Л. М. Бреховських, І. А. Вікторова, Р. Дейвіса, Г. Кольського, Дж. Райнхарта, Дж. Пірсона, А. Шоха та інших.

Значне коло явищ описує також нелінійна теорія поширення пружних хвиль, яка активно розвивається в останні роки. Результати, отримані в рамках нелінійної теорії поширення пружних хвиль, узагальнені в монографіях Д. Бленда, З. Весоловського, Л.К. Зарембо, В.А. Красильнікова, В.І. Карпмана, У.К. Нігула, У.К. Нігула, Ю.К. Енгельбрехта, О.В. Руденко, С.І. Солуяна,

К.Трусдела, Дж. Уінзема, Ю.В. Чугаєвського, Ю.К. Енгельбрехта, У.К. Нігула та інших.

Теорія поширення пружних хвиль має багато наукових напрямків. Один з них - теорія поширення пружних хвиль в шаруватих середовищах.

Значний вклад в теорію поширення пружних хвиль в шаруватих середовищах внесли такі вчені як Л. Брілюен, Р. Крістенсен, Л. А. Молотков, С. М. Ритов, Я. Я. Рушицький, І. С. Цурпал, Ч. Т. Сан, Дж. Д. Ахенбах, Дж. Герман, М. О. Шульга, G. Balanis, T. J. Delph, G. Herrmann, R. K. Kaul, W. Kohn, G.W. Postma, C. Sve, J. E. White, F. A. Angana та інші. Кількість робіт в цій галузі науки досить велика і вище приведений перелік - незначна її частина.

Досить повно теорія поширення хвиль в шаруватих середовищах викладена в монографіях Л. М. Бреховських, А.Н. Шульги та W.M. Ewing'a.

Однією з цікавих і актуальних проблем, аналіз якої неможливо провести у рамках класичної лінійної теорії поширення пружних хвиль, є теорія поширення пружних хвиль в тілах з початковими напруженнями. Ця теорія має досить широке коло прикладних аспектів.

Детальний аналіз становлення і розвитку теорії пружності для тіл з початковими напруженнями проведений в статтях О. М. Гузя.

Різні питання теорії пружності для тіл з початковими напруженнями розглянуті в монографіях В. В. Болотіна; А. І. Лур'є; Л. І. Седова; К. Трусдела; О.М. Гузя; О. М. Гузя, О. П. Жука, П.Г. Махорта; О. М. Гузя, Ф.Г. Махорта, О. Й. Гуші; О.М. Гузя, В.Д. Кубенка, М.А. Черевка та інших.

Велика кількість робіт по дослідженню поширення пружних хвиль в тілах з початковими напруженнями виконана співробітниками Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України під керівництвом академіка НАН України О.М.Гузя.

Огляд наявних в цій області робіт і детальний аналіз отриманих результатів до певної міри представлений в статтях С. Ю. Бабича, О. М. Гузя, О. П. Жука; А. М. Багно, О. М. Гузя; О. М. Гузя; S. D. Akbarov'a, а також в узагальнюючих монографіях О. М. Гузя.

Для композитних матеріалів періодичної структури в рамках тривимірної лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями отримала розвиток теорія поширення пружних хвиль у випадку однорідного початкового напружено-деформованого стану. Для дослідження задач застосовувалися загальні розв'язки, що викладені в монографіях О. М. Гузя.

Відповідно до класифікації О. М. Гузя, отримані результати можна об'єднати в наступні три групи.

До першої групи відносяться публікації О. М. Гузя, в яких розглянуті методи приведення шаруватих композитних матеріалів з початковими напруженнями до однорідного середовища. В цій групі робіт основним результатом можна вважати строге доведення того факту, що навіть при довгохвильовому наближенні композитні матеріали з початковими напруженнями не приводяться до анізотропних (ортотропних) матеріалів, властивості яких можна описати в рамках класичної лінійної теорії пружності.

До другої групи відносяться публікації О. М. Гузя, Ле Мінх Кхана та О. М. Панасюка, в яких розглянуті питання поширення плоских хвиль в шаруватих матеріалах.

Розглядалися випадки поширення хвиль перпендикулярно до шарів, вздовж шарів і під довільним кутом до шарів. Отримані дисперсійні рівняння та їх довгохвильові наближення для повздовжніх і поперечних хвиль, поляризованих в різних площинах. Досліджений вплив початкових напружень на швидкості поширення пружних хвиль.

Всі результати одержані в загальному вигляді для пружного потенціалу довільної форми.

Можна вважати, що основні результати для шаруватих композитних матеріалів з початковими напруженнями отримані в такому ж обсязі, як і для шаруватих композитних матеріалів в класичній теорії (без початкових напружень).

До третьої групи відносяться публікації О.М. Гузя, О.П. Жука, Н.А. Сітенка про поширення в радіальному напрямку вісесиметричних хвиль та хвиль кручення в шаруватих композитних матеріалах з початковими напруженнями періодичної структури.

В цих дослідженнях вважалося, що матеріали шарів є трансверсально-ізотропними, стисливими або нестисливими з довільною структурою пружного потенціалу. Додатково приймалися умови вісесиметричного початкового стану. В загальному вигляді отримані дисперсійні рівняння та їх довгохвильові наближення для квазіповздовжніх і квазіпоперечних хвиль для вісесиметричних хвиль і для симетричних і антисиметричних хвиль для хвиль кручення. Для потенціалу типу Мурнагана проведений чисельний аналіз отриманих дисперсійних рівнянь для порівняно жорстких матеріалів в широкому діапазоні частот.

У найбільш повній формі вищевказані результати представлені в монографіях О.М. Гузя.

В роботах О.М. Гузя, О.П. Жука, Ле Мінх Кхана та Н.А. Сітенка результати отримані для випадку повного контакту шарів.

В реальних композитних матеріалах, як правило, існують різного роду дефекти на межі розділу шарів. Для оцінки впливу таких дефектів на закономірності поширення плоских гармонічних хвиль в композитних матеріалах О.М. Панасюк розглянув такий граничний випадок контакту шарів як повне проковзування.

В роботах О.М. Панасюка композитний матеріал складається з двох компонентів, шари яких чергуються. Отримані дисперсійні рівняння та їх довгохвильові наближення для квазіпоперечної та квазіповздовжньої хвиль, що поширюються вздовж шарів стисливого композитного матеріалу, а також для квазіпоперечної хвилі, що поширюється вздовж шарів нестисливого композитного матеріалу.

Аналітичні результати приведені в загальній формі для матеріалів з пружним потенціалом довільної форми.

Проведені чисельні дослідження розв'язків дисперсійних рівнянь для матеріалів з пружним потенціалом Мурнагана та пружним потенціалом Трелоара. Досліджено вплив початкових напружень та проковзування шарів на закономірності поширення плоских гармонічних хвиль.

З огляду літератури можна зробити висновок про те, що поширення плоских гармонічних хвиль у шаруватих композитних матеріалах з початковими напруженнями вивчено достатньо повно. Дослідження даного класу задач проведені для випадку повного контакту шарів та для випадку повного проковзування шарів.

Для вісесиметричних пружних хвиль аналогічні задачі розглядалися тільки для випадку повного контакту шарів.

В даній роботі вперше досліджуються закономірності поширення вісесиметричних пружних хвиль в шаруватих композитних матеріалах з початковими напруженнями при проковзуванні шарів.

У **другому** розділі в рамках тривимірної лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями викладені в досить загальній формі співвідношення пружності, рівняння руху та граничні умови для стисливих та нестисливих тіл із пружним потенціалом довільної форми відповідно до теорії скінченних (великих) початкових деформацій і до двох варіантів теорії малих початкових деформацій.

Для випадку однорідного початкового стану приведені представлення загальних розв'язків просторових задач. Ці загальні розв'язки дають можливість досліджувати при єдиному підході досить широкі класи задач про поширення пружних хвиль в тілах з початковими напруженнями та з різною геометричною формою.

Усі основні співвідношення приведені в лагранжевих координатах у рамках методу Лагранжа із залученням декартової та криволінійної циліндричної систем координат.

Приведені результати є загальними для різних моделей деформованих тіл.

Основи лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими деформаціями детально викладені в роботах О.М. Гузя.

У **третьому** розділі дана постановка задач про поширення вісесиметричних пружних хвиль в шаруватих композитних матеріалах з початковими напруженнями при проковзуванні шарів та викладено методику розв'язання таких задач для стисливих і нестисливих тіл.

Проведено дослідження закономірностей поширення хвиль у стисливих та нестисливих шаруватих композитних матеріалах з початковими напруженнями при проковзуванні шарів у випадку однорідного початкового стану. Одержано нові дисперсійні співвідношення для квазіпоперечних і квазіповздовжніх хвиль, а також їхні довгохвильові наближення.

**Постановка задач.** Середовище поширення хвиль - композитний матеріал з початковими напруженнями періодичної структури. Композит складається з двох типів шарів, що чергуються. Початкові напружено-деформовані стани - однакові для кожного типу шарів. Матеріали шарів - стисливі або нестисливі, гіперпружні, ізотропні, з довільною структурою

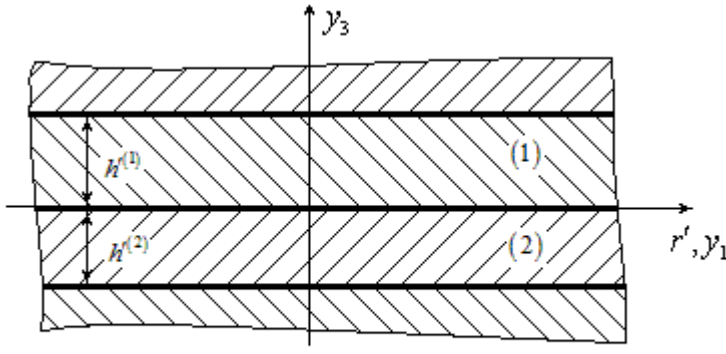


Рис. 1

пружного потенціалу. У разі трансверсально-ізотропних гіперпружних матеріалів шарів вважатимемо, що вісь ізотропії спрямована уздовж осі  $Oy_3$ .

Початковий напружений стан - однорідний і визначається відповідно до формул

$$u_m^{0(j)} = (\lambda_m^{(j)} - 1)x_m; \quad \lambda_m^{(j)} = \text{const.} \quad (1)$$

Також приймаємо, що для кожного з шарів мають місце співвідношення

$$S_{11}^{0(j)} = S_{22}^{0(j)} \neq S_{33}^{0(j)}; \quad \lambda_1^{(j)} = \lambda_2^{(j)}; \quad h'^{(j)} = \lambda_3^{(j)} h^{(j)}; \quad j=1,2. \quad (2)$$

В (1) і (2) індексами в дужках ( $j=1,2$ ) відзначені всі величини, що відносяться до шарів різних типів.  $S_{tt}^{0(j)}$  - складові тензора узагальнених напружень Лагранжа,  $h'^{(j)}$  - товщина  $j$ -го шару в початковому напружено-деформованому стані,  $h^{(j)}$  - товщина  $j$ -го шару в природному стані,  $\lambda_m^{(j)}$  - коефіцієнти видовження уздовж відповідних осей,  $u_m^{0(j)}$  - переміщення.

В представленнях загальних розв'язків приймаємо

$$u_{r'}^{(j)} = u_{r'}^{(j)}(r', y_3, \tau); \quad u_{\theta}^{(j)} \equiv 0; \quad u_3^{(j)} = u_3^{(j)}(r', y_3, \tau); \quad u_4^{(j)} \equiv p^{(j)} = p^{(j)}(r', y_3, \tau). \quad (3)$$

Останнє співвідношення в (3) відповідає тільки нестисливим тілам.

Вирази (3) відповідають вісесиметричній задачі і в цьому випадку можна також вважати, що функції, через які записується загальний розв'язок задачі, мають вигляд

$$\Psi'^{(j)} \equiv 0; \quad X'^{(j)} = X'^{(j)}(r', y_3, \tau). \quad (4)$$

Будемо вважати, що відбувається повне проковзування між шарами, тобто на границях розділу шарів виконуються умови неперервності типу

$$u_3'^{(1)}(0) = u_3'^{(2)}(0); \quad Q_{33}'^{(1)}(0) = Q_{33}'^{(2)}(0); \quad Q_{3r'}'^{(1)}(0) = 0; \quad Q_{3r'}'^{(2)}(0) = 0; \quad (5)$$

і умови періодичності, що відповідають теорії Флоке,

$$u_3'^{(1)}(h^{(1)}) = u_3'^{(2)}(-h^{(2)}); \quad Q_{33}'^{(1)}(h^{(1)}) = Q_{33}'^{(2)}(-h^{(2)}); \quad Q_{3r'}'^{(1)}(h^{(1)}) = 0; \quad Q_{3r'}'^{(2)}(-h^{(2)}) = 0. \quad (6)$$

Враховуючи (4), для визначення переміщень і напружень маємо в випадку стисливого матеріалу співвідношення

$$u_{r'}^{(j)} = -\frac{\partial^2}{\partial r' \partial y_3} X'^{(j)}; \quad \Delta'_1 = \frac{\partial^2}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'}; \quad (7)$$

$$u_3^{(j)} = \left( \omega_{1133}'^{(j)} + \omega_{1313}'^{(j)} \right)^{-1} \left( \omega_{1111}'^{(j)} \Delta'_1 + \omega_{3113}'^{(j)} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} - \varrho'^{(j)} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) X'^{(j)}.$$



$$Q'_{33} = \left( \omega'_{1133} + \omega'_{1313} \right)^{-1} \times \left\{ \left[ \omega'_{1111} \omega'_{3333} - \omega'_{1133} \left( \omega'_{1133} + \omega'_{1313} \right) \right] \Delta'_1 + \omega'_{3333} \omega'_{3113} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} - \omega'_{3333} \varrho'^{(j)} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right\} \frac{\partial}{\partial y_3} X'^{(j)}; \quad (8)$$

$$Q'_{3r'} = \left( \omega'_{1133} + \omega'_{1313} \right)^{-1} \left( \omega'_{1111} \omega'_{1313} \Delta'_1 + \omega'_{1133} \omega'_{3113} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} - \omega'_{1313} \varrho'^{(j)} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) \frac{\partial}{\partial r'} X'^{(j)};$$

$$\left[ \left( \Delta'_1 + \xi_2'^{(j)^2} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \left( \Delta'_1 + \xi_3'^{(j)^2} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) - \varrho'^{(j)} \left( \frac{\omega'_{1111} + \omega'_{1331}}{\omega'_{1111} \omega'_{1331}} \Delta'_1 + \frac{\omega'_{3333} + \omega'_{3113}}{\omega'_{1111} \omega'_{1331}} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \right. \\ \left. + \frac{\varrho'^{(j)^2}}{\omega'_{1111} \omega'_{1331}} \frac{\partial^4}{\partial \tau^4} \right] X'^{(j)} = 0, \quad (9)$$

а в випадку нестисливого матеріалу

$$u_{r'}^{(j)} = -\frac{\partial^2}{\partial r' \partial y_3} X'^{(j)}; \quad u_3^{(j)} = \Delta'_1 X'^{(j)}; \quad \varrho'^{(j)} = \varrho^{(j)} \quad (10)$$

$$u_4^{(j)} \equiv p^{(j)} = \left[ \left( \kappa'_{1111} - \kappa'_{1133} - \kappa'_{1313} \right) \Delta'_1 + \kappa'_{3113} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} - \varrho'^{(j)} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right] \frac{\partial}{\partial y_3} X'^{(j)}.$$

$$Q'_{33} = \left[ \left( \kappa'_{1111} + \kappa'_{3333} - 2\kappa'_{1133} - \kappa'_{1313} \right) \Delta'_1 + \kappa'_{3113} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} - \varrho'^{(j)} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right] \frac{\partial}{\partial y_3} X'^{(j)}; \quad (11)$$

$$Q'_{3r'} = \left( \kappa'_{1313} \Delta'_1 - \kappa'_{3113} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \frac{\partial}{\partial r'} X'^{(j)};$$

$$\left[ \left( \Delta'_1 + \xi_2'^{(j)^2} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \left( \Delta'_1 + \xi_3'^{(j)^2} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) - \frac{\varrho'^{(j)}}{\kappa'_{1331}} \left( \Delta'_1 + \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right] X'^{(j)} = 0. \quad (12)$$

В (7) – (12)  $\omega'$  і  $\kappa'$  – тензори, що характеризують матеріал шарів композитного матеріалу. Величини  $\xi_2'^{(j)}$  і  $\xi_3'^{(j)}$  в (9) і (12) визначаються через складові тензорів  $\omega'$  або  $\kappa'$  для матеріалів кожного з розглянутих шарів.  $\varrho'^{(j)}$  – щільність матеріалів кожного з шарів.

Таким чином, задача зводиться до побудови розв'язків рівнянь (9) або (12) при умовах неперервності на границях розділу шарів (5) і умовах періодичності (6).

**Методика розв'язання задач.** Розглядається поширення вісесиметричної хвилі в радіальному напрямку. Основний об'єкт дослідження "істинна" фазова швидкість.

Будемо вважати, що функцію  $X'^{(j)}$  можна представити у вигляді

$$X'^{(j)}(r', y_3, \tau) = X'^{(j)(0)}(y_3) H_0^{(1)}(r'k) e^{-i\omega\tau}; \quad C = \omega k^{-1}; \quad j = 1, 2. \quad (13)$$

В (13)  $k$  і  $\omega$  - хвильове число і кругова частота;  $C$  - "істинна" фазова швидкість вісесиметричних хвиль;  $H_0^{(1)}(x)$  - функція Ханкеля нульового порядку першого роду;  $X^{(j)(0)}$  - амплітудна функція. Надалі індексом (0) позначені всі амплітудні величини в представленнях типу (13).

Підставляючи (13) в (7), (8) і в (10), (11), отримуємо вирази для визначення переміщень і напружень відповідно для стисливого матеріалу і для нестисливого матеріалу. Таким же способом з рівнянь (9) і (12) маємо рівняння для визначення амплітудної функції  $X^{(j)(0)}$ :

для стисливого матеріалу

$$\left[ \left( \xi_2'^{(j)^2} \frac{d^2}{dy_3^2} - k^2 \right) \left( \xi_3'^{(j)^2} \frac{d^2}{dy_3^2} - k^2 \right) + \omega^2 \rho'^{(j)} \left( \frac{\omega_{3333}'^{(j)} + \omega_{3113}'^{(j)}}{\omega_{1111}'^{(j)} \omega_{1331}'^{(j)}} \frac{d^2}{dy_3^2} - k^2 \frac{\omega_{1111}'^{(j)} + \omega_{1331}'^{(j)}}{\omega_{1111}'^{(j)} \omega_{1331}'^{(j)}} \right) + \frac{\omega^4 \rho'^{(j)^2}}{\omega_{1111}'^{(j)} \omega_{1331}'^{(j)}} \right] X^{(j)(0)} = 0; \quad (14)$$

для нестисливого матеріалу

$$\left[ \left( \xi_2'^{(j)^2} \frac{d^2}{dy_3^2} - k^2 \right) \left( \xi_3'^{(j)^2} \frac{d^2}{dy_3^2} - k^2 \right) + \frac{\omega^2 \rho'^{(j)}}{\kappa_{1331}'^{(j)}} \left( \frac{d^2}{dy_3^2} - k^2 \right) \right] X^{(j)(0)} = 0. \quad (15)$$

Граничні умови і умови періодичності також можна записати для амплітудних величин.

Таким чином, задача зводиться до знаходження розв'язку звичайних диференціальних рівнянь (14) або (15), що задовольнить умовам (5) і (6) для амплітудних величин.

Розв'язок рівнянь (14) або (15) шукаємо у формі

$$X^{(j)(0)}(y_3) = \sum_{m=1}^4 B_m^{(j)} e^{(-1)^m i k \alpha_r^{(j)} \left( y_3 + (-1)^j \frac{1}{2} h^{(j)} \right)}; \quad \tau = \begin{cases} m = 1, 3; \\ m = 2, 4. \end{cases} \quad (16)$$

В (16)  $\alpha_1^{(j)^2}$  і  $\alpha_2^{(j)^2}$  - корені характеристичних рівнянь звичайних диференціальних рівнянь (14) або (15).

У випадку стисливого матеріалу вихідну задачу можна розділити на дві незалежні задачі: квазіповздовжня хвиля, що розповсюджується уздовж вісі  $Or'$ ; квазіпоперечна хвиля, поширюється уздовж вісі  $Or'$  і поляризована в площині  $r'Oy_3$ .

Для нестисливого матеріалу має сенс розглядати квазіпоперечну хвилю, яка поширюється вздовж вісі  $Or'$  і поляризована в площині  $r'Oy_3$ .

Надалі розглядаються окремо квазіповздовжні та квазіпоперечні вісесиметричні хвилі.

*Квазіповздовжня хвиля уздовж вісі  $Or'$ .* Для цього випадку в (16) приймемо такі залежності

$$B_1^{(j)} = -B_2^{(j)}; \quad B_3^{(j)} = -B_4^{(j)}. \quad (17)$$

За умови (17) переміщення  $u_r^{(j)}$  будуть симетричними, а  $u_3^{(j)}$  будуть антисиметричними щодо середини відповідних шарів.

Враховуючи вирази для переміщень і напружень через амплітудні функції і підставляючи (16) і (17) в умови (5) і (6), після ряду перетворень отримуємо однорідну систему алгебраїчних рівнянь, з умови існування нетривіальних розв'язків якої слідує дисперсійне рівняння у вигляді

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^2 \left( C_{lr'}^2 \varrho'^{(n)} - \omega'_{1111} \right) \left( \alpha_2^{(n)2} - \alpha_1^{(n)2} \right) \left( \omega'_{1313} - \omega'_{1133} \right) \omega'_{3113} \operatorname{tg} \frac{1}{2} k \alpha_1^{(n)} h'^{(n)} \operatorname{tg} \frac{1}{2} k \alpha_2^{(n)} h'^{(n)} \times \\ & \times \left\{ \alpha_1^{(m)} \left[ \left( C_{lr'}^2 \varrho'^{(m)} - \omega'_{1111} \right) \omega'_{3333} + \omega'_{1133} \left( \omega'_{1133} + \omega'_{1313} \right) - \alpha_1^{(m)2} \omega'_{3333} \omega'_{3113} \right] \times \right. \\ & \times \left[ \left( C_{lr'}^2 \varrho'^{(m)} - \omega'_{1111} \right) \omega'_{1313} - \alpha_2^{(m)2} \omega'_{1133} \omega'_{3113} \right] \operatorname{tg} \frac{1}{2} k \alpha_2^{(m)} h'^{(m)} - \\ & \left. - \alpha_2^{(m)} \left[ \left( C_{lr'}^2 \varrho'^{(m)} - \omega'_{1111} \right) \omega'_{3333} + \omega'_{1133} \left( \omega'_{1133} + \omega'_{1313} \right) - \alpha_2^{(m)2} \omega'_{3333} \omega'_{3113} \right] \times \right. \\ & \left. \times \left[ \left( C_{lr'}^2 \varrho'^{(m)} - \omega'_{1111} \right) \omega'_{1313} - \alpha_1^{(m)2} \omega'_{1133} \omega'_{3113} \right] \operatorname{tg} \frac{1}{2} k \alpha_1^{(m)} h'^{(m)} \right\} = 0; \quad n=1,2; \quad m \neq n, \end{aligned} \quad (18)$$

де  $C_{lr'}^2 = \omega/k$  - швидкість квазіповздовжньої хвилі у напрямі вісі  $Or'$ .

Для довгохвильового наближення з урахуванням (17) отримаємо рівняння

$$\begin{aligned} & h'^{(2)} \left( \omega'_{1313} - \omega'_{1133} \right) \left( C_{lr'}^2 \varrho'^{(2)} - \omega'_{1111} \right) \times \\ & \times \left[ \left( C_{lr'}^2 \varrho'^{(1)} - \omega'_{1111} \right) \omega'_{3333} \left( \omega'_{1313} - \omega'_{1133} \right) - \omega'_{1133} \left( \omega'_{1133} + \omega'_{1313} \right) \right] + h'^{(1)} \left( \omega'_{1313} - \omega'_{1133} \right) \times \\ & \times \left( C_{lr'}^2 \varrho'^{(1)} - \omega'_{1111} \right) \left[ \left( C_{lr'}^2 \varrho'^{(2)} - \omega'_{1111} \right) \omega'_{3333} \left( \omega'_{1313} - \omega'_{1133} \right) - \omega'_{1133} \left( \omega'_{1133} + \omega'_{1313} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

З виразу (19) випливає, що для квазіповздовжньої хвилі існують дві швидкості поширення.

Квазіпоперечна (зсувна) хвиля уздовж вісі  $Or'$ , поляризована в площині  $r'Oy_3$ . Для цього випадку в представленні розв'язку у формі (16) для двох сусідніх шарів прийmemo, що мають місце залежності

$$B_1^{(j)} = B_2^{(j)}; \quad B_3^{(j)} = B_4^{(j)}. \quad (20)$$

За умови (20) переміщення  $u_{r'}^{(j)}$  будуть антисиметричними, а  $u_3^{(j)}$  будуть симетричними відносно середини відповідних шарів.

Провівши ті ж перетворення, що і для квазіповздовжньої хвилі отримаємо дисперсійні рівняння у вигляді:

для стисливого матеріалу

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^2 \left( C_{Sy_3}^2 \varrho'^{(n)} - \omega'_{1111} \right) \left( \alpha_2^{(n)2} - \alpha_1^{(n)2} \right) \omega'_{3113} \left( \omega'_{1133} - \omega'_{1313} \right) \times \\ & \times \left\{ \alpha_1^{(m)} \left[ \left( C_{Sy_3}^2 \varrho'^{(m)} - \omega'_{1111} \right) \omega'_{1313} - \alpha_2^{(m)2} \omega'_{1133} \omega'_{3113} \right] \times \right. \\ & \times \left[ \left( C_{Sy_3}^2 \varrho'^{(m)} - \omega'_{1111} \right) \omega'_{3333} + \omega'_{1133} \left( \omega'_{1133} + \omega'_{1313} \right) - \omega'_{3333} \omega'_{3113} \alpha_1^{(m)2} \right] \operatorname{tg} \frac{1}{2} k \alpha_1^{(m)} h'^{(m)} - \\ & \left. - \alpha_2^{(m)} \left[ \left( C_{Sy_3}^2 \varrho'^{(m)} - \omega'_{1111} \right) \omega'_{1313} - \alpha_1^{(m)2} \omega'_{1133} \omega'_{3113} \right] \left[ \left( C_{Sy_3}^2 \varrho'^{(m)} - \omega'_{1111} \right) \omega'_{3333} + \right. \right. \end{aligned}$$

$$+ \omega'_{1133} \left( \omega'_{1133} + \omega'_{1313} \right) - \omega'_{3333} \omega'_{3113} \alpha_2^{(m)2} \left] \operatorname{tg} \frac{1}{2} k \alpha_2^{(m)} h'^{(m)} \right\} = 0; \quad n=1,2; \quad n \neq m; \quad (21)$$

і для нестисливого матеріалу

$$\begin{aligned} & \left( \alpha_2^{(2)2} - \alpha_1^{(2)2} \right) \kappa'_{3113} \left[ \alpha_1^{(1)} \left( \kappa'_{1313} - \alpha_2^{(1)2} \kappa'_{3113} \right) \left( C_{Sy_3}^2 \varrho^{(1)} - \kappa'_{1111} - \kappa'_{3333} + 2\kappa'_{1133} + \kappa'_{1313} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \alpha_1^{(1)2} \kappa'_{3113} \right) \operatorname{tg} \frac{1}{2} k \alpha_1^{(1)} h'^{(1)} - \alpha_2^{(1)} \left( \kappa'_{1313} - \alpha_1^{(1)2} \kappa'_{3113} \right) \left( C_{Sy_3}^2 \varrho^{(1)} - \kappa'_{1111} - \kappa'_{3333} + 2\kappa'_{1133} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \kappa'_{1313} - \alpha_2^{(1)2} \kappa'_{3113} \right) \operatorname{tg} \frac{1}{2} k \alpha_2^{(1)} h'^{(1)} \right] - \left( \alpha_2^{(1)2} - \alpha_1^{(1)2} \right) \kappa'_{3113} \left[ \alpha_2^{(2)} \left( \kappa'_{1313} - \alpha_1^{(2)2} \kappa'_{3113} \right) \times \right. \\ & \left. \times \left( C_{Sy_3}^2 \varrho^{(2)} - \kappa'_{1111} - \kappa'_{3333} + 2\kappa'_{1133} + \kappa'_{1313} - \alpha_2^{(2)2} \kappa'_{3113} \right) \operatorname{tg} \frac{1}{2} k \alpha_2^{(2)} h'^{(2)} - \alpha_1^{(2)} \left( \kappa'_{1313} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \alpha_2^{(2)2} \kappa'_{3113} \right) \left( C_{Sy_3}^2 \varrho^{(2)} - \kappa'_{1111} - \kappa'_{3333} + 2\kappa'_{1133} + \kappa'_{1313} - \alpha_1^{(2)2} \kappa'_{3113} \right) \operatorname{tg} \frac{1}{2} k \alpha_1^{(2)} h'^{(2)} \right] = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Для довгохвильового (низькочастотного) наближення, обмежуючись одночленною апроксимацією, отримаємо наступні значення для фазової швидкості:

стисливий матеріал

$$\begin{aligned} C_{Sy_3}^2 &= \frac{\omega'_{1111}}{\varrho^{(1)}}; \quad C_{Sy_3}^2 = \frac{\omega'_{1111}}{\varrho^{(2)}}; \\ C_{Sy_3}^2 &= \left( \varrho^{(1)} h'^{(1)} - \varrho^{(2)} h'^{(2)} \right)^{-1} \left\{ h'^{(1)} \left[ \omega'_{1331} - \omega_0^{(1)} \omega'_{1313} \omega_{3113}^{(1)-1} \left( \omega'_{1313} - \omega_{1133}^{(1)} \right)^{-1} \right] - \right. \\ & \left. - h'^{(2)} \left[ \omega'_{1331} - \omega_0^{(2)} \omega'_{1313} \omega_{3113}^{(2)-1} \left( \omega'_{1313} - \omega_{1133}^{(2)} \right)^{-1} \right] \right\}; \end{aligned} \quad (23)$$

нестисливий матеріал

$$C_{Sy_3}^2 = \frac{\left( \kappa'_{1331} - \kappa_{1313}^{(1)2} \kappa_{3113}^{(1)-1} \right) h'^{(1)} + \left( \kappa'_{1331} - \kappa_{1313}^{(2)2} \kappa_{3113}^{(2)-1} \right) h'^{(2)}}{\varrho^{(1)} h'^{(1)} + \varrho^{(2)} h'^{(2)}}. \quad (24)$$

В виразах (21) - (24)  $C_{Sy_3}^2 = \omega/k$  - швидкість квазіпоперечної хвилі вздовж осі  $Or'$ , поляризованої в площині  $r'Oy_3$ .

Аналіз рівнянь (18), (19), (23) - (26) свідчить, що при поширенні вісесиметричних хвиль при проковзуванні шарів відбувається взаємодія між шарами композиту.

У **четвертому** розділі чисельно досліджуються розв'язки дисперсійних рівнянь, отриманих в роботах О.М. Гузя для випадку повного контакту шарів нестисливого композитного матеріалу, та аналогічні розв'язки дисперсійних рівнянь для випадку повного проковзування шарів.

Для проведення числового аналізу розглядалися пружні потенціали Трелоара і Бартенєва-Хазановича. Основні дослідження впливу початкових напружень, умов контакту та параметра шаруватості на швидкість поширення

квазіпоперечних хвиль в композитному вискоеластичному матеріалі виконані в рамках потенціалу Трелоара

$$w^{(j)} = 2c_{10}^{(j)} A_1^{(j)},$$

де  $c_{10}^{(j)}$  - пружна стала,  $A_1^{(j)}$  - алгебраїчний інваріант.

Розрахунки проведені при початковому стані

$$S_{11}^{0(j)} = S_{22}^{0(j)} \neq 0; \quad S_{33}^{0(j)} = 0; \quad \lambda^{(j)} = \lambda_1^{(j)} = \lambda_2^{(j)}; \quad \lambda_3^{(j)} = \lambda^{(j)-2};$$

та наступних співвідношеннях механічних характеристик шарів композиту

$$c_{10}^{(1)} / c_{10}^{(2)} = 5; \quad \rho^{(2)} / \rho^{(1)} = 0,7.$$

На всіх рисунках введені такі позначення:  $C/C_s^{0(2)}$  - безрозмірна швидкість поширення хвилі в шаруватому композитному матеріалі,  $\bar{h}$  - приведена частота ( $\bar{h} = k_s^{0(2)} h^{(2)}$ ),  $C_s^{0(2)}$  - швидкість поперечних хвиль в ізотропному матеріалі другого шару без початкових напружень,  $C$  - така ж швидкість при початкових напруженнях,  $m$  - параметр шаруватості ( $m = h^{(1)} / h^{(2)}$ ),  $k_s^{0(2)}$  - хвильове число.

Результати представлені в вигляді залежності безрозмірної швидкості поширення хвиль  $C/C_s^{0(2)}$  від приведеної частоти  $\bar{h}$  для перших п'яти мод. Моді позначені цифрами 0 – 4.

На рис. 2 показана залежність безрозмірної швидкості поширення хвилі в шаруватому композитному матеріалі від приведеної частоти для перших п'яти мод.

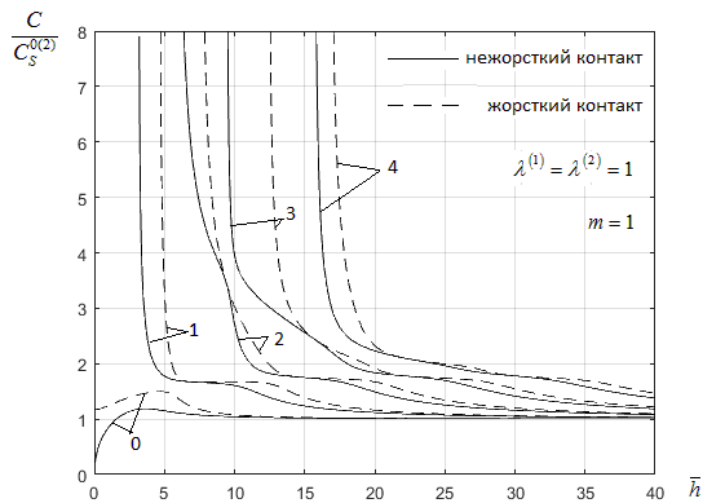


Рис. 2

Криві для різних умов контакту на рис. 2 визначають діапазон зміни фазової швидкості квазіпоперечної хвилі, що визначається двома граничними умовами контакту шарів композитного матеріалу. З міркувань фізичного характеру, слідує, що ці дисперсійні криві визначають область розв'язку дисперсійного рівняння при інших можливих варіантах контакту між шарами для зазначеного вище початкового напруженого стану.

На рис. 3 – 8 показані залежності безрозмірних швидкостей поширення вісесиметричної хвилі в шаруватому композитному матеріалі від приведеної частоти та початкових напружень для перших трьох мод.

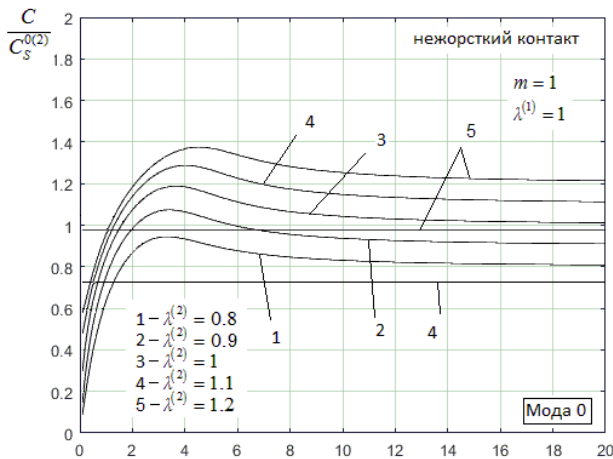


Рис. 3

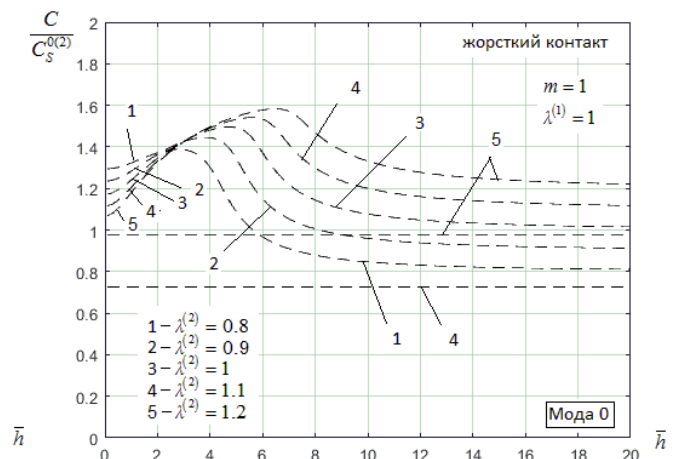


Рис. 4

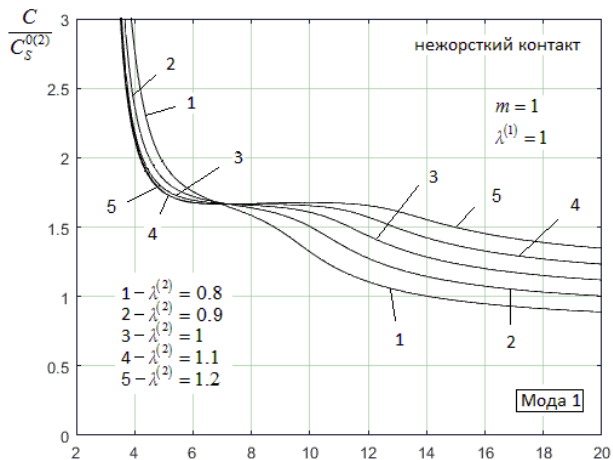


Рис. 5

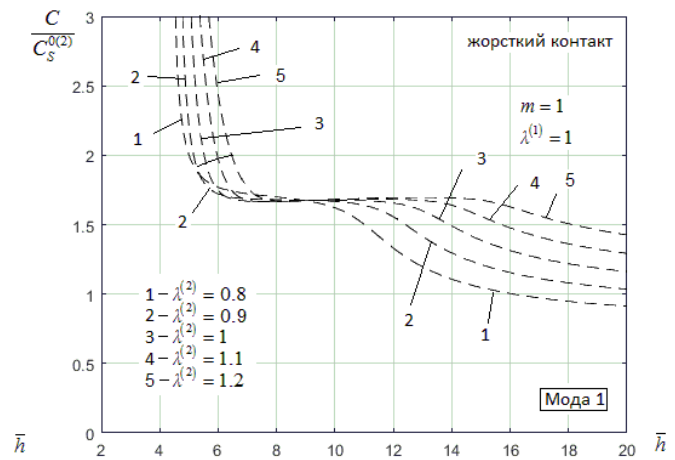


Рис. 6

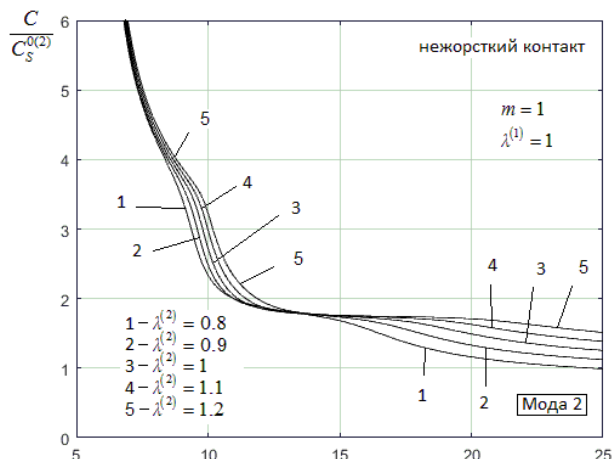


Рис. 7

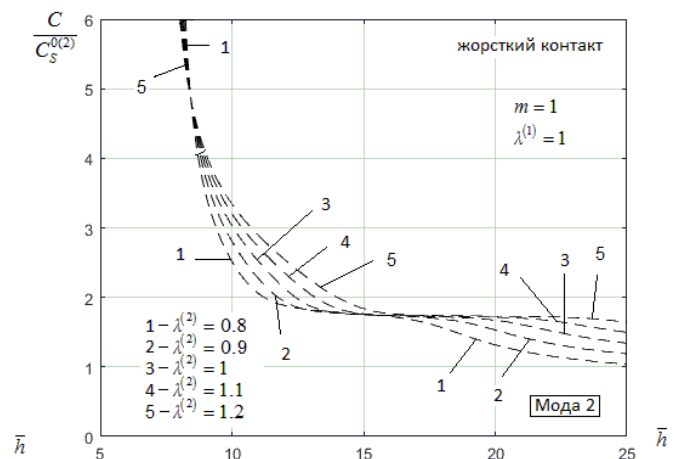


Рис. 8

Вважалося, що перший шар композитного матеріалу є ненапруженим, а початковий напружений стан композитного матеріалу визначається різними початковими напруженнями в другому шарі композиту.

Відзначимо, що при розтягуванні для розглянутих умов контакту між шарами композитного нестисливого матеріалу і початкового напруженого стану існують дві нульові моди (рис. 3 і 4).

На рис. 9 і 10 показані залежності фазової швидкості квазіпоперечної хвилі від приведеної частоти при різних умовах контакту між шарами композиту і різних значеннях параметра шаруватості.

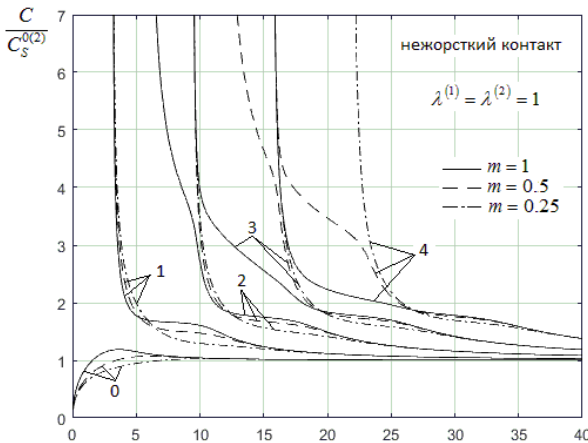


Рис. 9

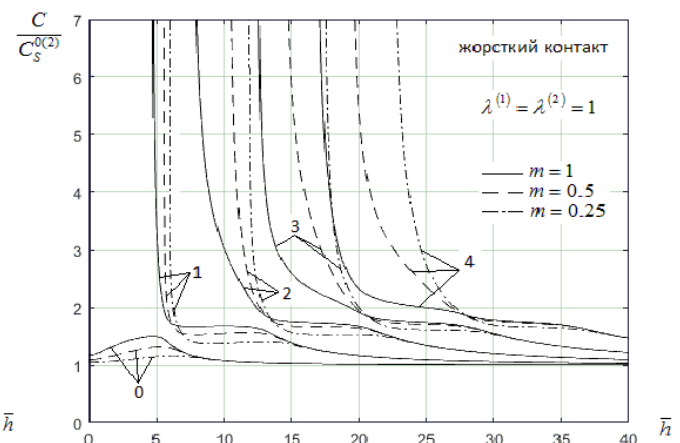


Рис. 10

Проведена оцінка розв'язків дисперсійних рівнянь для різних пружних потенціалів: потенціала Трелоара і потенціала Бартенєва-Хазановича (рис. 11 і 12).

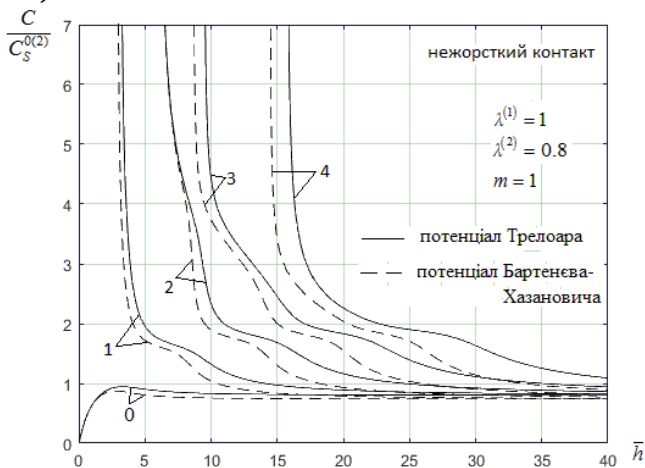


Рис. 11

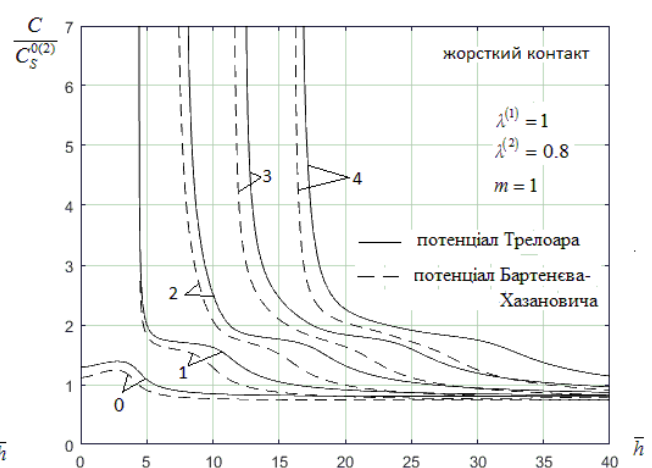


Рис. 12

Отримані результати свідчать про те, що вибір пружного потенціалу (моделі пружного тіла) має суттєве значення.

При розглянутому початковому напруженому стані фазова швидкість для пружного потенціалу Бартенєва-Хазановича майже в усьому діапазоні частот нижча, ніж для потенціалу типу Трелоара.

В роботі також проведено порівняння двох моделей процесу поширення пружних хвиль в нестисливому композитному матеріалі: плоскої хвилі та вісесиметричної (рис.13).

Результати показують незначну відмінність в значеннях фазової швидкості плоскої квазіпоперечної хвилі та вісесиметричної квазіпоперечної хвилі. В певних діапазонах частот швидкість плоскої і вісесиметричної хвиль співпадають або дуже близькі.

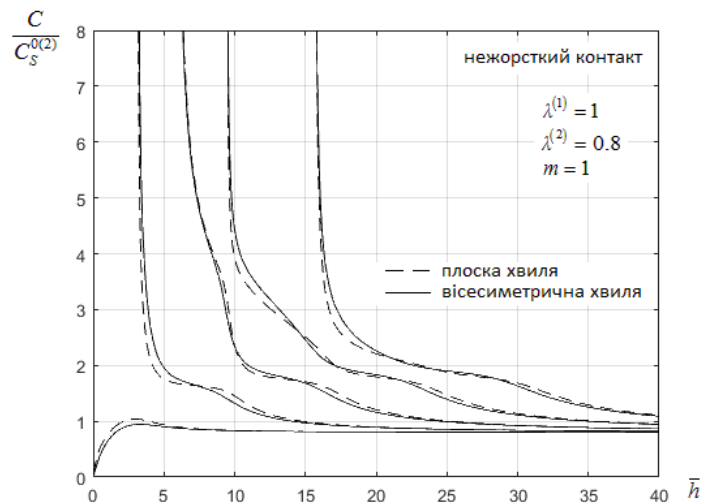


Рис. 13

## ВИСНОВКИ

В дисертаційній роботі вперше розв'язана задача про поширення вісесиметричних пружних хвиль у шаруватих композитних матеріалах з однорідними початковими напруженнями **при проковзуванні шарів**.

Основні результати отримані в роботі можна сформулювати так:

1) вперше дано постановку задач про поширення вісесиметричних пружних хвиль у стисливих та нестисливих шаруватих композитних матеріалах з початковими напруженнями;

2) розвинено метод розв'язання задачі про поширення вісесиметричних пружних хвиль в шаруватих композитних матеріалах періодичної структури з початковими напруженнями;

3) виведено нові дисперсійні рівняння для квазіпоперечної та квазіповздовжньої хвиль у випадку стисливих матеріалів і квазіпоперечної хвилі у випадку нестисливих матеріалів;

4) отримано довгохвильові наближення одержаних дисперсійних рівнянь для визначення фазових швидкостей вказаних хвиль у низькочастотній області;

5) у широкому діапазоні значень частоти проведено чисельні дослідження дисперсійних співвідношень для квазіпоперечної хвилі, що поширюється в високоеластичному шаруватому композитному матеріалі, для різних умов контакту між шарами композитного матеріалу, різними початковими напруженнями, відношеннями товщин шарів, різними пружними потенціалами;

6) проведено порівняння розв'язків дисперсійних рівнянь для плоских і вісесиметричних хвиль.

На основі отриманих числових результатів для випадку повного контакту шарів і випадку повного проковзування шарів побудовано двосторонню оцінку для фазової швидкості вісесиметричних хвиль. Отримані оцінки можуть бути використані в інженерній практиці.



Встановлено та проаналізовано нові загальні закономірності поширення вісесиметричних пружних хвиль в шаруватому композитному матеріалі з початковими напруженнями при проковзуванні шарів.

Отримані результати перевірялися на еталонних задачах. Всі основні результати узгоджуються з результатами вже відомими і міркуваннями фізичного характеру.

## СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Глухов А. Ю. Про поширення вісесиметричних хвиль в шаруватих композитних стисливих матеріалах з початковими напруженнями при проковзуванні шарів / А. Ю. Глухов // Доповіді НАН України, 2016. – № 8. – С. 33 – 39.
2. Глухов А. Ю. Вісесиметричні хвилі в шаруватих композитних нестисливих матеріалах з початковими напруженнями при проковзуванні шарів / А. Ю. Глухов // Доповіді НАН України, 2016. – № 10. – С. 42 – 46.
3. Глухов А. Ю. Поширення вісесиметричних хвиль в композитних нестисливих матеріалах з початковими напруженнями при умові неповного контакту між шарами / А. Ю. Глухов // Вісник Запорізького національного університету. Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. – Запоріжжя: Запорізький національний університет, 2017. – № 1. – С. 73 – 81.
4. Глухов А. Ю. Осесимметричные волны в композитных несжимаемых материалах с начальными напряжениями / А. Ю. Глухов // Прикладная механика, 2018. – Том 54, № 4. – С. 35 – 46.
5. Глухов А. Ю. Про вплив початкових напружень на вісесиметричні квазіпоперечні хвилі у нестисливому композитному матеріалі / А. Ю. Глухов // Доповіді НАН України, 2019. – № 2. – С. 45 – 51.
6. Glukhov A. Yu. Axisymmetric Waves in Prestressed Incompressible Laminated Composite Materials with Sliding Layers / A. Yu. Glukhov // Int. Appl. Mech. – 2018. – 54, N 4. – P. 399 – 410.
7. Глухов А. Ю. Поширення вісесиметричних пружних хвиль вздовж шарів композитного стисливого матеріалу з початковими напруженнями / А.Ю. Глухов // Міжнародна наукова конференція „Математичні проблеми технічної механіки – 2016”. – Дніпродзержинськ, Дніпропетровськ, Київ, 18 – 21 квітня 2016. – С. 103.
8. Глухов А. Ю. Поширення вісесиметричних пружних хвиль вздовж шарів композитного нестисливого матеріалу з початковими напруженнями / А.Ю. Глухов // 3-я международная научно-практическая интернет-конференция «Актуальные проблемы инженерной механики», Одесса – Киев, 10 – 14 мая 2016. – С. 53 – 54.

9. Глухов А. Ю. Чисельний аналіз дисперсійних рівнянь при поширенні вісесиметричних хвиль вздовж шарів композитного матеріалу з початковими напруженнями / А. Ю. Глухов // Науково-технічна конференція «Інформатика, математика, автоматика – 2016», 18-22 квітня, Суми. – С. 269.

10. Глухов А. Ю. Про поширення вісесиметричних хвиль в шаруватих композитних матеріалах з початковими напруженнями при проковзуванні шарів / А. Ю. Глухов // IV Всеукраїнська наукова конференція «Математичне моделювання та математична фізика», 3 – 5 жовтня 2016, Кременчук. – С. 47 – 48.

11. Глухов А. Ю. Поширення вісесиметричних квазіпоперечних хвиль в високоеластичному композитному матеріалі при проковзуванні шарів / А.Ю. Глухов // Міжнародна наукова конференція „Математичні проблеми технічної механіки – 2017”. – Дніпро, Кам’янське, 18 – 20 квітня 2017. – С. 39.

12. Глухов А. Ю. Чисельний аналіз дисперсійних рівнянь для нестисливого композитного матеріалу з початковими напруженнями / А.Ю. Глухов // XVII Міжнародна конференція «Моделювання та дослідження стійкості динамічних систем» (DSMSI-2017), Київ, 24 – 26 травня 2017. – С. 116.

13. Глухов А. Ю. Поширення вісесиметричних квазіпоперечних хвиль в високоеластичному композитному матеріалі / А. Ю. Глухов // V Всеукраїнська наукова конференція «Математичне моделювання та математична фізика», 3 – 5 жовтня 2017, Кременчук. – С. 31 – 33.

14. Глухов А. Ю. Распространение квазипоперечных волн в слоистых материалах с начальными напряжениями / А. Ю. Глухов // VIII Международная научно-практическая конференция «Проблемы безопасности на транспорте», 23 – 24 ноября 2017, Республика Беларусь, г. Гомель. – С. 176 – 178.

15. Глухов А. Ю. Поширення вісесиметричних квазіпоперечних хвиль в композитному матеріалі з початковими напруженнями / А. Ю. Глухов // XV Міжнародна науково-технічна конференція “Фізичні процеси та поля технічних і біологічних об’єктів”. - Кременчук, 3 – 5 листопада 2017. – С. 128 – 129.

16. Глухов А. Ю. Моделювання динамічних процесів в шаруватих композитних матеріалах з початковими напруженнями / А. Ю. Глухов // III Всеукраїнська науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих вчених “Інформаційні технології в моделюванні ІТМ – 2018”. – Миколаїв, 22 – 23 березня 2018. – С. 23 – 24.

17. Глухов А. Ю. Про дві математичні моделі для шаруватого композитного матеріалу / А. Ю. Глухов // II Міжнародна науково-практична інтернет-конференція «Наука III тисячоліття: пошуки, проблеми, перспективи розвитку». – Бердянськ, 25 – 26 квітня 2018. – С. 30 – 31.

18. Глухов А. Ю. Поширення плоских та вісесиметричних хвиль в нестисливому композитному матеріалі з початковими напруженнями / А.Ю.

Глухов, О.М. Панасюк // Всеукраїнська заочна науково-практична Інтернет-конференція «Прикладна математика та комп'ютерні науки». – Донецький державний університет управління, 22 лютого 2019 року. – С. 30 – 32.

19. Глухов А. Ю. Про поширення вісесиметричних хвиль в композитному нестисливому матеріалі з початковими напруженнями / А. Ю. Глухов // 6-я міжнародная научно-практическая конференция «Актуальные проблемы инженерной механики», Одесса-Киев, 20 – 24 мая 2019. – С. 359 – 360.

## АНОТАЦІЯ

**Глухов А. Ю. Поширення вісесиметричних пружних хвиль в шаруватих композитних матеріалах з початковими напруженнями при проковзуванні шарів. – Рукопис.**

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла. – Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ, 2019.

Дисертація присвячена дослідженню закономірностей поширення вісесиметричних пружних хвиль в шаруватих композитних матеріалах з початковими напруженнями **при проковзуванні шарів**.

Розглядається композитний матеріал, що має періодичну структуру і складається з шарів двох типів, що чергуються. Для кожного типу шарів матеріали і початкові напружено-деформовані стани є однаковими. Початковий напружений стан є однорідним і симетричним. На границях розділу шарів неперервні лише нормальні напруження та переміщення, а всі дотичні напруження рівні нулеві.

Розглянуто випадок поширення хвиль уздовж шарів. Отримані дисперсійні рівняння для квазіпоперечної та квазіповздовжньої хвиль у випадку стисливих матеріалів і квазіпоперечної хвилі у випадку нестисливих матеріалів, а також їх довгохвильові наближення.

Аналітичні результати приведені в загальному вигляді для матеріалів з пружним потенціалом довільної форми.

У широкому діапазоні значень частоти проведені чисельні дослідження дисперсійних співвідношень для квазіпоперечної хвилі, що поширюється в високоеластичному шаруватому композитному матеріалі, для різних умов контакту між шарами композитного матеріалу, різними початковими напруженнями, геометричними параметрами та пружними потенціалами.

**Ключові слова:** шаруватий композитний матеріал, початкові напруження, вісесиметричні пружні хвилі, пружний потенціал, стисливий та нестисливий матеріал, квазіпоперечна та квазіповздовжня хвилі, фазова швидкість, дисперсійне рівняння, довгохвильове наближення.

## АННОТАЦИЯ

**Глухов А. Ю. Распространение осесимметричных упругих волн в слоистых композитных материалах с начальными напряжениями при проскальзывании слоев. – Рукопись.**

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела. – Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев, 2019.

Диссертация посвящена исследованию закономерностей распространения осесимметричных упругих волн в слоистых композитных материалах с начальными напряжениями **при проскальзывании слоев.**

В течение последних десятилетий в мире неуклонно расширяется производство композитных материалов и область их применения. Научное обоснование основ и принципов конструирования композитов является предпосылкой создания материалов с заранее заданными свойствами, значительно превосходящими свойства классических материалов или вообще отсутствующими в них. Это обуславливает значительный интерес к исследованию широкого круга научных проблем, касающихся композитных материалов. Одна из таких проблем - исследование процессов, связанных с распространением упругих волн в слоистых композитных материалах с начальными напряжениями.

В диссертации впервые дана постановка задач о распространении осесимметричных упругих волн в слоистых композитных материалах с начальными напряжениями при условии полного проскальзывания слоев.

Рассматривается композитный материал, имеющий периодическую структуру и состоящий из двух типов чередующихся слоев. Для каждого типа слоев материалы и начальные напряженно-деформированные состояния одинаковы.

Материалы слоев считаются гиперупругими, изотропными или трансверсально-изотропными, сжимаемыми или несжимаемыми с произвольной формой упругих потенциалов. В случае трансверсально-изотропных гиперупругих материалов слоев считаем, что ось изотропии направлена перпендикулярно плоскостям разделения слоев.

Начальное напряженное состояние является однородным и симметричным.

На границах раздела слоев непрерывны только нормальные напряжения и перемещения, а все касательные напряжения равны нулю.

Исследования проведены в рамках трехмерной линеаризированной теории распространения упругих волн в телах с начальными напряжениями, использованы представления общих решений пространственных задач для случая однородного начального состояния, предложенные О. М. Гузем.

Рассмотрен случай распространения волн вдоль слоев.

Исследование закономерностей распространения осесимметричных упругих волн в слоистых композитных материалах с начальными

напряжениями сводится к построению решений уравнения движения при удовлетворении граничных условий на плоскостях раздела слоев и условий периодичности Флоке.

Из условий непрерывности и периодичности после ряда преобразований получаем однородную систему алгебраических уравнений, из условия существования нетривиальных решений которой выходят дисперсионные уравнения для разных моделей слоистой среды.

Новые дисперсионные уравнения, а также их длинноволновые приближения, получены для квазипоперечной и квазипродольной волн в случае сжимаемых материалов и квазипоперечной волны в случае несжимаемых материалов.

Аналитические результаты приведены в общем виде для материалов с упругим потенциалом произвольной формы.

В широком диапазоне значений частоты проведены численные исследования дисперсионных соотношений для квазипоперечной волны, распространяющейся в высокоэластичном слоистом композитном материале, для разных условий контакта между слоями композитного материала, различными начальными напряжениями, геометрическими параметрами и упругими потенциалами.

Проведено сравнение решений дисперсионных уравнений для плоских и осесимметричных волн.

На основе полученных числовых результатов для случая полного контакта слоев и случая полного проскальзывания слоев построено двустороннюю оценку для фазовой скорости осесимметричных волн. Полученные оценки могут быть использованы в инженерной практике.

Установлены и проанализированы новые общие закономерности распространения осесимметричных упругих волн в слоистом композитном материале с начальными напряжениями при проскальзывании слоев.

Полученные результаты проверялись на эталонных задачах данного класса. Все основные результаты согласуются с результатами уже известными и соображениями физического характера.

**Ключевые слова:** слоистый композитный материал, начальные напряжения, осесимметричные упругие волны, упругий потенциал, сжимаемый и несжимаемый материал, квазипоперечная и квазипродольная волна, фазовая скорость, дисперсионное уравнение, длинноволновое приближение.

## SUMMARY

**Glukhov A. Yu. Propagation of the axisymmetric elastic waves in laminated materials with initial stresses at slipping layers. – Manuscript.**

Thesis for Candidates Degree of Physical and Mathematical Sciences in speciality 01.02.04 – Mechanics of Deformable Solids. – S. P. Timoshenko Institute of mechanics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2019.

The thesis is devoted to study of propagation of the axisymmetric elastic waves in layered laminated materials with initial stresses **at slipping layers**.

Composite material, which has a periodic structure and consists of layers of two alternating types, is considered. For each type of layers, the materials and the initial stress-strain states are the same. Materials of the layers are compressible or incompressible with an arbitrary form of elastic potentials. The initial stress state is homogeneous and symmetric. Only the normal stresses and movements are continuous at the boundaries of the layer, and tangential stresses equal zero.

The case of wave propagation along the layers is considered. The study was conducted within the framework of a three-dimensional linearized theory of the propagation of elastic waves in bodies with initial stresses.

The dispersion equations for quasi-transverse and quasi-longitudinal waves in the case of compressed materials and quasi-transverse wave in the case of incompressible materials, as well as their long-wave approximations are obtained.

The analytical results are given in general terms for materials with an elastic potential of arbitrary shape.

In a wide range of frequency values, numerical studies of dispersion relations for a quasi-transverse wave propagating in a highly elastic layered composite material for various contact conditions between layers of a composite material, different initial stresses, geometric parameters and elastic potentials have been carried out.

**Key words:** layered composite material, initial stresses, axisymmetric elastic waves, elastic potential, compressive and incompressible material, quasi-transverse and quasi-longitudinal waves, phase velocity, dispersion equation, long-wave approximation.